Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 4 - Espacios de Hilbert (para clase)

1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que

$$\|y\|^2\big(\|x\|^2\|y\|^2 - |(x \mid y)|^2\big) = \big\|\|y\|^2 x - (x \mid y)y\big\|^2 \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

   Deduce a apartir de aquí la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano real. Prueba que:

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 \iff \|x+y\| = \|x-y\| \iff \|x+ty\| \geqslant \|x\| \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano complejo. Prueba que:

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ \text{ y } \ \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que:

   a) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones en $B_{\mathcal{H}}$ que verifican $\{\|x_n + y_n\|\} \to 2$ entonces $\{\|x_n - y_n\|\} \to 0$.

   b) Si una sucesión $\{x_n\}$ y $x \in \mathcal{H}$ verifican que $\{(x_n \mid x)\} \to \|x\|^2$ y $\{\|x_n\|\} \to \|x\|$, entonces $\{x_n\} \to x$.

5. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert. Prueba que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n u_n$ converge si, y sólo si, converge la serie $\sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^2$. En cuyo caso

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

6. Prueba que en un espacio de Hilbert de dimensión infinita una base ortonormal nunca es una base algebraica.

7. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Prueba que para todo $f \in \mathcal{H}^*$ se verifica que $\lim \{f(u_n)\} = 0$.

8. Prueba que

$$M = \left\{ f \in L_2[0,4] : \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \ = 0 \right\}$$

es un subespacio cerrado de $L_2[0,4]$. Calcula el punto más próximo en M a la función característica del intervalo $[0,1]$.

9. Se considera el espacio prehilbertiano $C([0,1],\mathbb{R})$ con la norma $\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\,\mathrm{d}t \right)^{1/2}$.

Prueba que dicho espacio es suma ortogonal del subespacio de las funciones pares con el subespacio de las funciones impares.

10. Se considera el espacio prehilbertiano $(c_{00}, \|\ \|_2)$. Sea $M = \left\{ x \in c_{00} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}$.

Prueba que M es un subespacio cerrado de c_{00} y calcula $M^{\perp}$.¿Es cierto el teorema de Riesz-Fisher en c_{00}?

11. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \perp N$. Prueba que el subespacio $M+N$ es cerrado.

12. Calcula el complemento ortogonal en ℓ_2 del subespacio M engendrado por los vectores $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre M.

13. Sea M el subespacio de ℓ_2 engendrado por los vectores $\{e_n - 5e_{n+1} + 6e_{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$. Prueba que $x \in M^{\perp}$ si, y sólo si, verifica que

$$x(n) - 5x(n+1) + 6x(n+2) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Deduce que x es combinación lineal de los vectores $\{u, v\}$ donde $u(n) = 2^{-n-1}$, $v(n) = 3^{-n-1}$.

14. Sea $A = \{e_{2n-1} + e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

   a) Describe los espacios $M = A^{\perp}$ y $M^{\perp}$.

   b) Calcula las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

15. Calcula el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t) = \mathrm{e}^{iat}$ donde $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y deduce que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$$

Deduce a partir de aquí que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

16. Prueba que para $f \in L_2[-\pi, \pi]$ la mejor aproximación a f por una suma del tipo $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k \operatorname{sen}(kx)$, con $N \in \mathbb{N}$ fijo, se obtiene cuando

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, \mathrm{d}x$$

dichos números se llaman **coeficientes de Fourier seno** de f.